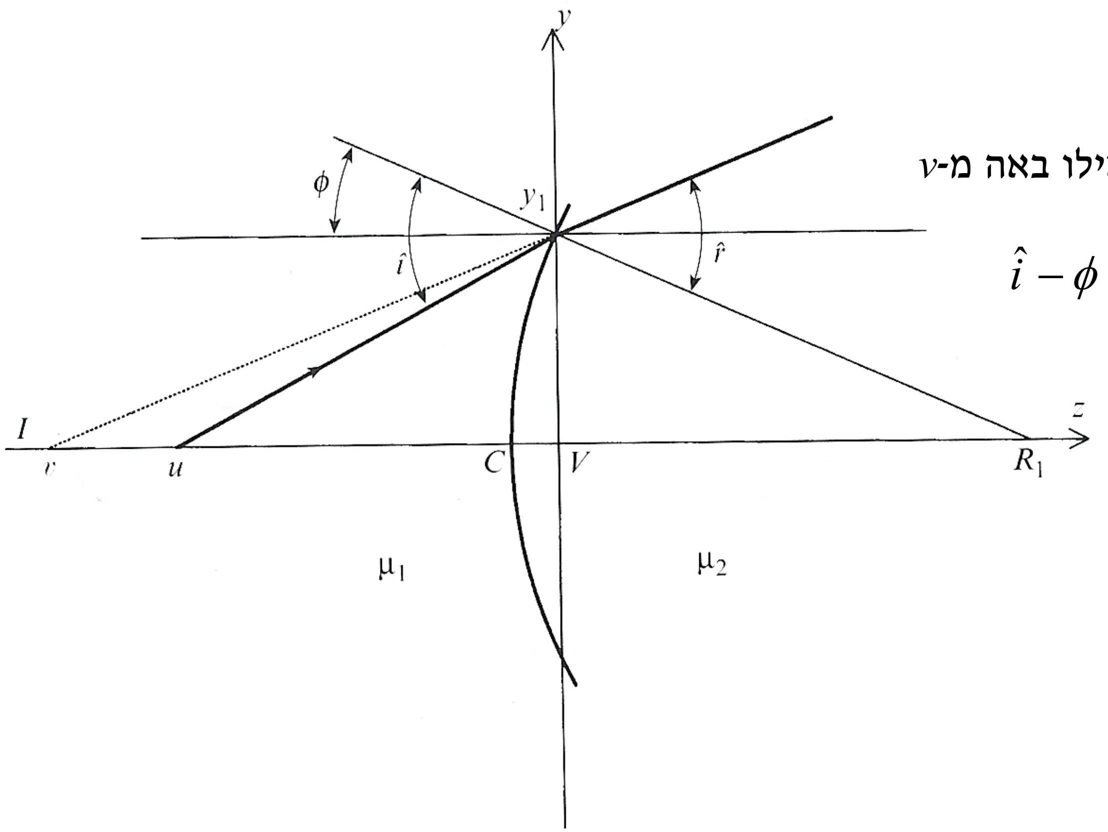
אופטיקה גאומטרית

- הקירוב הגאוסי או הפאראקסיאלי: כל הזויות קטנות, קטרי הרכיבים קטנים לעומת מרחקיהם זה מזה.
- מכאן $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$ וגם $n_1 \sin \hat{\imath} = n_2 \sin \acute{r}$ הופך ל- $n_1 \hat{\imath} \approx n_2 \acute{r}$
- חוקי סימנים:

1. מערכת קרטזית
2. למשטחים קעורים ימינה רדיוס חיובי
3. זויות של קרנים עולות ימינה הן חיוביות
4. קרנים נעות משמאל לימין במערכת עדשות

שבירת קרן



נניח משמאל אויר, מימין זכוכית.

$R_1 >> y_1$; $R_1 >> CV$; $CV \approx 0$

קרן המתחילה מ-u נשברת ונראית כאילו באה מ-v

$$\hat{i} - \phi = -\frac{y_1}{u}; \quad \hat{r} - \phi = -\frac{y_1}{v}; \quad \phi = \frac{y_1}{R_1}$$

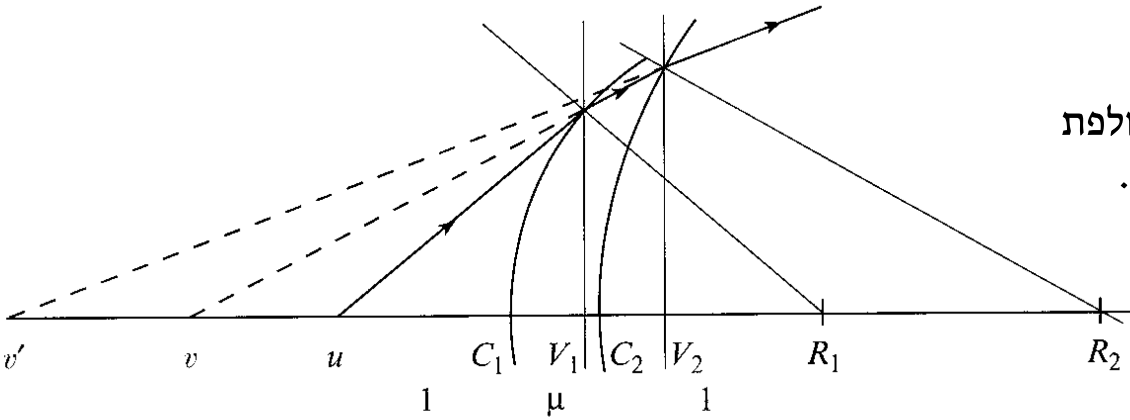
מחלצים

$$\frac{\hat{i}}{\hat{r}} = \mu = \frac{y_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{u}\right)}{y_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{v}\right)}$$

ומכאן

$$\frac{-\mu}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{R_1}(1 - \mu)$$

עדשה דקה



מוסיפים את המשטח השני ברדיוס R_2 ומשתמשים בדמות שקיבלנו כעצם, תוך החלפת מקדמי השבירה. כלומר מניחים כי $C_1C_2\approx 0$.

$$-\frac{1}{v'}+\frac{\mu}{v}=\frac{1}{R_2}(\mu-1)$$

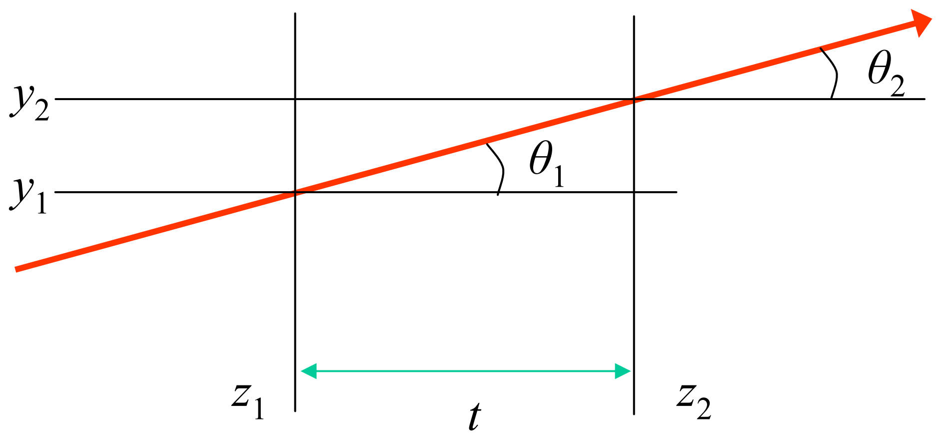
מחברים עם המשוואה הקודמת ומקבלים את משוואת העדשות

$$-\frac{1}{u}+\frac{1}{v'}=(\mu-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$

f^{-1} הוא כוח העדשה, ונמדד בדיופטריות.

עדשות בעלות מוקד חיובי הן מכנסות או מגדילות, ובעלות מוקד שלילי – מפזרות או מקטינות.

מטריצת העתקה



- מערכות פרקסיאליות
- קרנים מרידיונליות
- חישוב במישור y-z בלבד
- מקדם שבירה μ

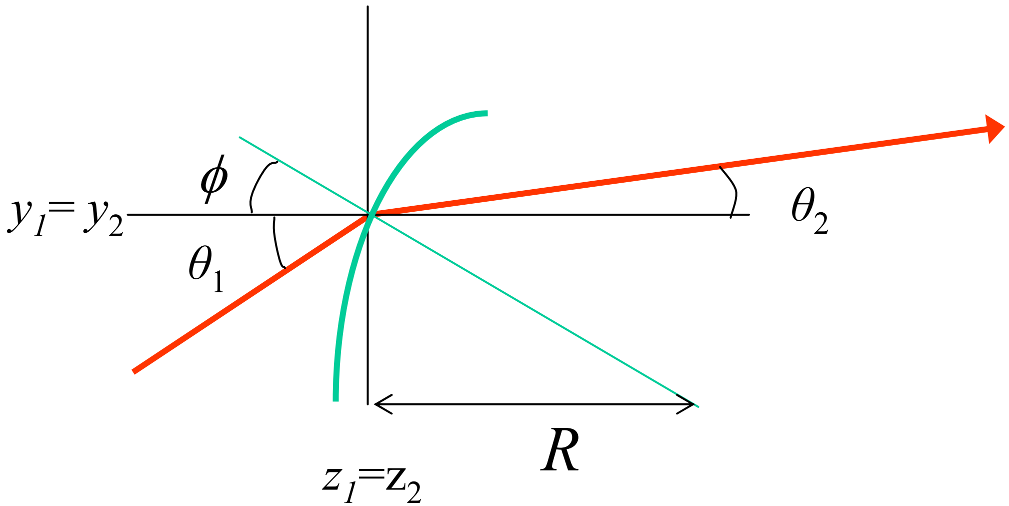
$$y_2 = y_1 + t\theta_1$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

- מכאן מקבלים את מטריצת ההעתקה T

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t/\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

מטריצת שבירה



- רדיוס עקמומיות R
- זויות קטנות, למשל $\sin\hat{\imath} \approx \hat{\imath}$
- מקדם שבירה μ_1 עובר למקדם μ_2

$$\mu_1(\phi + \theta_1) = \mu_2(\phi + \theta_2)$$

$$\phi = \frac{y_1}{R}$$

$$\mu_2\theta_2 = \mu_1\theta_1 - (\mu_2 - \mu_1)\frac{y_1}{R}$$

- מכאן מקבלים את מטריצת השבירה R

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu_2 - \mu_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

מטריצות מקשרות

- כל מטריצה המחברת שתי נקודות מקיימת באופן כללי

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu\theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{21} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

- המטריצה M_{21} היא מכפלה כללית של מטריצות T ו-R
- כל מטריצה מאלו מקיימת $\det\{R\} = \det\{T\} = 1$
- מכאן מקבלים שגם $\det\{M_{21}\} = 1$

מטריצת עדשה עבה

- הציר האופטי של העדשה מוגדר על ידי מרכזי הכדורים של המשטחים. זהו ציר הסימטריה של העדשה.
- מקדם השבירה של תווך העדשה הוא μ, והיא מצויה באויר.
- נניח שהעדשה משתרעת בין הנקודות z_1 ו- z_2 ועוביה הוא t .
- לצורך קבלת מטריצת העדשה נכפיל את מטריצות המעבר לזכוכית, ההעברה בזכוכית, והיציאה לאויר

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\mu-1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{\mu} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-\mu}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\dfrac{(1-\mu)t}{\mu R_1} & \dfrac{t}{\mu} \\ (\mu-1)\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)-\dfrac{(1-\mu)^2 t}{\mu R_1 R_2} & 1+\dfrac{(\mu-1)t}{\mu R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{M}_{21} \begin{pmatrix} y_1 \\ \mu\theta_1 \end{pmatrix}$$

מטריצת עדשה דקה

- בקרוב טוב מאוד עובי העדשה זניח ביחס לרדיוסים ואפילו להפרשיהם: $t<<|R_1-R_2|$
- רוב אברי המטריצה נעלמים.

$$\mathbf{M}_{21}=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{(1-\mu)t}{\mu R_1} & \dfrac{t}{\mu} \\ (\mu-1)\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)-\dfrac{(1-\mu)^2 t}{\mu R_1 R_2} & 1+\dfrac{(\mu-1)t}{\mu R_2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\mu-1)\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

- הקרוב לא תקף עבור שני רדיוסים $R_1=R_2$ כיון שאז אי אפשר להזניח את עובי העדשה.
- אם $R_1<R_2$ העדשה עבה יותר במרכזה והיא חיובית, או מרכזת.
- עבור תווך חיצוני ראשון בעל מקדם שבירה μ_1 ותווך שני בעל מקדם שבירה μ_2 מקבלים

$$\mathbf{M}_{21} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\mu-\mu_2}{R_2}+\dfrac{\mu_1-\mu}{R_1} & 1 \end{pmatrix}$$

מערכת כללית

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu_2\theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{21}\begin{pmatrix} y_1 \\ \mu_1\theta_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- זוהי מטריצה של מערכת אופטיקה כללית שנובעת מאוסף של רכיבים אופטיים.
- מערכת זו יוצרת דמות של עצם במישור *צמוד* לו אופטית.
- כל קרן חייבת להגיע מנקודת העצם לנקודת הדמות, ללא תלות בזוית היציאה מן העצם.
- לכן חייב להתקיים $B = 0$.
- בגלל שבנוסף $\det\{M\} = 1$ נובע ש- $AD = 1$.
- ההגדלה של המערכת היא $m = y_2 / y_1 = A$.
- ניקח קרן העוזבת את הציר בזוית θ_1 ולאחר העדשה חוזרת לציר בזוית θ_2,
- ההגדלה הזויתית תהיה *הפוכה* להגדלת הדמות (עד כדי מקדם השבירה)

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = D\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{m}\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

עדשה דקה באויר

- נשים את העצם בנקודה u (שלילי), את העדשה בנקודה $z = 0$ ואת העצם בנקודה v.
- נעביר את הקרן לעדשה, דרך העדשה, ואל הדמות:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{v}{f} & -u + v + \dfrac{vu}{f} \\ -\dfrac{1}{f} & 1 + \dfrac{u}{f} \end{pmatrix}$$

- בגלל שהמערכת יוצרת דמות, מתקיים $B = 0$
- מתקבלת נוסחת העדשות

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

- ההגדלה היא יחס גבהי הנקודות $m = y_2 / y_1 = A = 1 - v / f = v / u$
- ההגדלה הזויתית היא $D = 1 + u / f = 1 / m = u / v$

נוסחת ניוטון

- שוב נדרוש יצירת דמות.
- אם $B = 0$ אזי $AD = 1$, או $(1 - v / f)(1 + u / f) = 1$ ומכאן נוסחת ניוטון

$$\left(f - v\right)\left(f + u\right) = f^2$$

- נוסחה זו נובעת רק מהדרישה ליצירת דמות, ועל כן תהיה תקפה גם לעדשות עבות.
- ניתן לגזור את נוסחת ניוטון מנוסחת העדשות.
- השתמשנו בכלל שמרחק העצם שלילי.

טלסקופים

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu_2\theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{21}\begin{pmatrix} y_1 \\ \mu_1\theta_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- במקרה שנדרוש שאבר המטריצה C יתאפס, אין תלות של זוית היציאה בגובה הקרן הנכנסת.
- אלומת קרנים מקבילות בכניסה תיצור אלומה מקבילה ביציאה, אם כי בזוית אחרת.
- זוהי מערכת ללא מוקד – א-פוקלית או טלסקופית.
- במערכת טלסקופית עצם באינסוף יוצר דמות באינסוף.
- דוגמות: טלסקופ אסטרונומי, טלסקופ גליליי.

דימות במערכת אופטית

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+vc & b-au+v(d-cu) \\ c & d-cu \end{pmatrix}$$

- זוהי מערכת אופטית כללית שבה העצם בנקודה $-u$ לפניה והדמות במרחק v אחריה.
- שוב נדרוש יצירת דמות, כלומר $B = 0$. מכאן $b - au + vd - vcu = 0$.
- אם $B = 0$ אזי $AD = 1$, או $(a + v c)(d - c u) = 1$.
- נשווה לנוסחת ניוטון $(f - v)(u + f) = f^2$.
- אם נגדיר $f = -1 / c$ אזי נקבל $(f a - v)(u + f d) = f^2$
- כדי לחשב את מרחקי המוקדים, נרחיק את את העצם ואחר כך את הדמות לאינסוף,
- נקבל שמרחקי המוקדים משני צידי העדשה הם בהתאמה $+d / c$ ו- $-a / c$.

נקודות עיקריות

- נוסחת ניוטון $(f - v)(u + f) = f^2$.
- הגדרנו $f = -1 / c$ וקבלנו $(fa - v)(u + fd) = f^2$
- נשכתב ונקבל $\{f - [v - (a - 1) f]\} \{f + [u - (1 - d) f]\} = f^2$
- נגדיר עוד

$$u_p = (d - 1) / c$$
$$v_p = (1 - a) / c$$

- נקבל כעת

$$[f - (v - v_p)] [f + (u - u_p)] = f^2$$

- זוהי נוסחת ניוטון שבה מודדים את מרחקי העצם והדמות מהנקודות העיקריות (principal points) u_p, v_p.

הגדלה ומישורים עיקריים

בדרך דומה ניתן לקבל את נוסחת העדשות ביחס למישורים העיקריים

$$-\frac{1}{u-u_p}+\frac{1}{v-v_p}=\frac{1}{f}$$

מודדים את מרחקי העצם והדמות מהנקודות העיקריות u_p, v_p.

ההגדלה תהיה לפי הערכים של u, v במדידה ביחס לנקודות העיקריות u_p, v_p :

$$m=A=\frac{v-v_p}{u-u_p}$$

ההגדלה הזויתית היא שוב $1/m$.

מיקומי המישורים העיקריים

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+vc & b-au+v(d-cu) \\ c & d-cu \end{pmatrix}$$

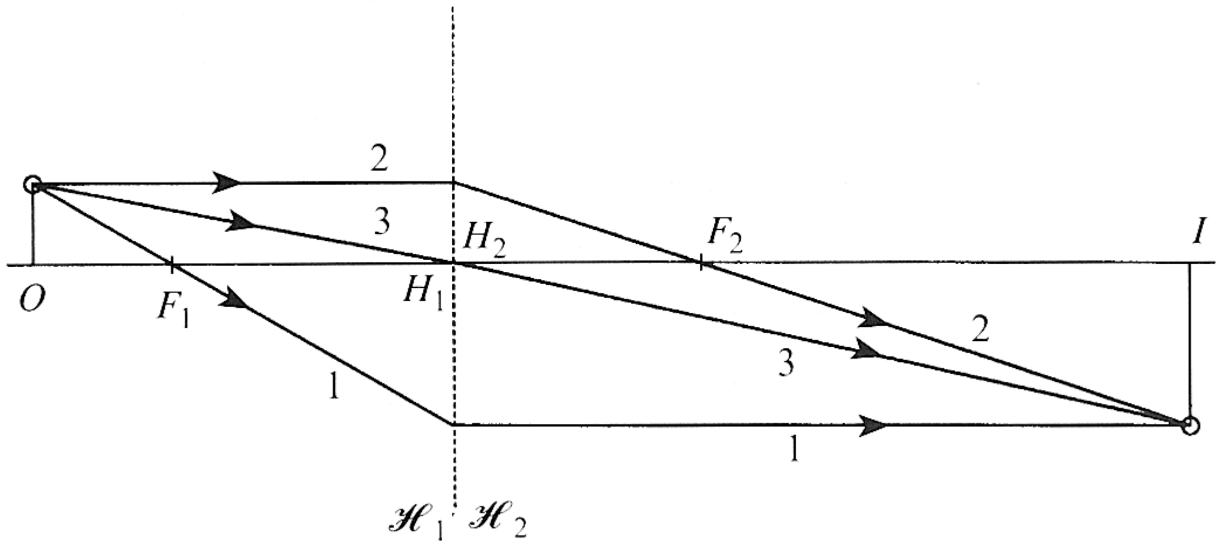
- נציב את הנקודות העיקריות $u=u_p$; $v=v_p$.
- נקבל $A=D=1; B=0$.
- $B=0$ ומכאן שהמישורים צמודים אופטית.
- בין המישורים הגדלה של יחידה והגדלה זויתית של יחידה *ללא היפוך הדמות*.
- מיקומי המישורים ביחס לכניסה וליציאה מהמערכת האופטית וביחס ביניהם הם:

$$H_1 : z = \frac{d-1}{c} + z_1; \quad H_2 : z = \frac{1-a}{c} + z_2$$

$$F_1 : z = \frac{d}{c} + z_1; \quad F_2 : z = \frac{-a}{c} + z_2$$

$$F_1H_1 = H_2F_2 = -\frac{1}{c} = f$$

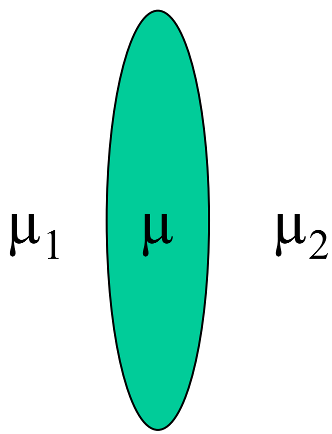
מעדשה עבה לדקה



בגלל הגדלת היחידה בין המישורים העיקריים, הקרנים נחשבות כאילו הן מועתקות אופקית מאחת לשניה בתוך המערכת.

ניתן להתבונן על המערכת האופטית העבה כעדשה דקה אם מצמידים את שני המישורים העיקריים זה לזה.

עדשות בין תווכים



$$\mathbf{M}_{21} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\mu-\mu_2}{R_2}+\dfrac{\mu_1-\mu}{R_1} & 1 \end{pmatrix}$$

מכאן מקבלים את אורך המוקד.

בעדשה דקה מחליפים את u ב- u/μ_1 , ואת v ב- v/μ_2 ומקבלים

$$-\frac{\mu_1}{u}+\frac{\mu_2}{v}=\frac{1}{f}$$

חוזרים על ההצבה במערכת עדשות כללית, ומקבלים עבור נוסחת ניוטון ($f = -1/c$)

$$\left(fa\mu_2 - v\right)\left(fd\mu_1 + v\right) = \mu_1\mu_2 f^2$$

מיקום המישורים העיקריים הוא

$$H_1 : z = \mu_1 \frac{d-1}{c} + z_1; \quad H_2 : z = \mu_2 \frac{1-a}{c} + z_2$$

מישורי צומת

•ההגדלה הזויתית תלויה ביחס מקדמי השבירה.

•נחפש נקודות עם הגדלה זויתית של יחידה (נקודות צומת).

•אם יש דימות בין נקודות הצומת אזי $D = 1 / A = \mu_2 / \mu_1$ ומכאן

$$A = \frac{\mu_1}{\mu_2} = a + \frac{v_n c}{\mu_2}; \quad D = \frac{\mu_2}{\mu_1} = d - \frac{u_n c}{\mu_1}$$

$$v_n = \frac{\mu_1 - \mu_2 a}{c}; \quad u_n = \frac{\mu_1 d - \mu_2}{c}$$

•נחסר ממיקומי מישורי הצומת את מיקומי המישורים העיקריים ונקבל

$$H_1 N_1 = H_2 N_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{c}$$

•אנו רואים שכאשר התווך החיצוני הוא אחיד אזי מישורי הצומת מתלכדים עם המישורים העיקריים.